ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

О ПАРЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ АФФИНОРОМ

Г.М. Силаева
(МГПИ им. В.И. Ленина)

В работе рассматривается пара гиперповерхностей в n-мерном евклидовом пространстве. С этой парой определенным образом связывается некоторый аффинор. Изучается тот случай, когда этот аффинор является вырожденным.

1. Рассмотрим гиперповерхности V_{n-1}, $\bar{V}_{n-1}$ в евклидовом n-мерном пространстве и диффеоморфизм $f: V_{n-1} \to \bar{V}_{n-1}$. Предполагаем, что $y = f(x) \neq x$. Присоединим к каждой точке x поверхности V_{n-1} подвижной репер $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ ($i,j = 1,\dots,n-1$) принадлежали касательному пространству к поверхности V_{n-1} в точке x, а единичный вектор $\vec{e}_n$ не принадлежал T_x. Деривационные формулы репера R^x имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^n \vec{e}_n, \quad d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i + \omega_n^n \vec{e}_n. \qquad (1)$$

Пусть вектор $\vec{xy}$ не параллелен ни касательному пространству $T_x(V_{n-1})$, ни касательному пространству $T_{f(x)}(\bar{V}_{n-1})$. Направим вектор $\vec{e}_n$ вдоль вектора $\vec{xy}$. Зафиксируем точку $x \in V_{n-1}$ ($\omega^i = 0$, $i = 1,\dots,n-1$) – получим, что $\delta\vec{e}_n = \vec{0}$, где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам, следовательно, формы ω_n^A ($A,B = \overline{1,n}$) – главные, т.е.

$$\omega_n^A = t_i^A \omega^i. \qquad (2)$$

Можно показать, что функции t_i^A в любой точке $x \in V_{n-1}$ образуют геометрический объект типа тензора, а функции t_i^j – подобъект этого объекта типа аффинора, который обозначим через T, причем $t_i^n = -t_i^j \gamma_{jn}$, и, значит, $\operatorname{rang} \| t_i^A \| = \operatorname{rang} \| t_i^j \|$.

Очевидно, аффинор T является нулевым тогда и только тогда, когда прямые, соединяющие соответствующие точки отображения f, являются параллельными.

2. Рассмотрим точку F, такую, что $\vec{F} = \vec{x} + \varphi\vec{e}_n$, где $\varphi \neq 0$.

Используя формулы (1), (2), получим, что

$$d\vec{F} = (\delta_j^i + \varphi t_j^i)\omega^j \vec{e}_i + (d\varphi + t_j^n \omega^j)\vec{e}_n.$$

Если при некотором смещении точки x по поверхности V_{n-1} имеется $d\vec{F} \parallel \vec{e}_n$, то точка F является фокусом прямой xy. Это приводит к системе уравнений $(\delta_j^i + \varphi t_j^i)\omega^j$, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $\det\|\delta_j^i + \varphi t_j^i\| = 0$, или $|E + \varphi T| = 0$, где $E = \|\delta_j^i\|$, δ_j^i – символ Кронекера. В случае, когда $\operatorname{rang} T$ максимальный, полученное уравнение имеет степень $n-1$, и, значит, в общем случае на прямой xy имеется $n-1$ фокусов. Пусть $\operatorname{rang} T = \tau$ ($\tau < n-1$), т.е. $\det T = 0$. Рассмотрим уравнение $|E + \varphi T| = 0$, левая часть которого, как это можно показать, равна $|E + \varphi T| = \varphi^{n-1} \cdot \det T + \Phi(\varphi)$, где $\Phi(\varphi)$ – многочлен степени не выше $n-2$. Таким образом, справедливы

Теорема 1. Аффинор T является вырожденным тогда и только тогда, когда число фокусов прямой xy понижается.

Теорема 2. $\operatorname{rang} T = \tau$ ($\tau < n-1$) тогда и только тогда, когда поверхность V_{n-1} расслаивается на поверхности размерности $(n-1) - \tau$, вдоль которых прямые xy параллельны.

Теорема 3. Если конгруэнция прямых xy является нормальной [3], то аффинор T является вырожденным тогда и только тогда, когда гиперповерхность V_{n-1} тангенциально вырожденная.

Можно показать, что в случае, когда аффинор T нулевой, любое направление на поверхности V_{n-1} является f-асимптотическим [1], а произвольная линия γ поверхности V_{n-1} является двойной линией отображения f [2].

Библиографический список

1. Базылев В.Т. О характеристических линиях отображений пространств аффинной связности.// Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. Уфа, 1985. С. 12-19.

2. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград. Вып. 6. 1975. С. 19-25.

3. Фиников С.П. Теория конгруэнций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 528с.